- **Introducció: què tenen a veure les matemàtiques amb entendre el món?**

- Els comportaments "massa" predictibles dels insectes periòdics: tant o més misteriosos

Les matemàtiques ens proporcionen una eina imprescindible per fer-nos una imatge racional del món. En paraules de Galileu Galilei (1564-1642), *[The universe] no es pot llegir fins que no n'hem après l'idioma i ens hem familiaritzat amb els caràcters amb els que està escrit. I està escrit en llenguatge matemàtic, i les lletres són triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense les quals és humanament impossible entendre'n un sol mot*." Il Saggiatore (L'assagista), 1623. Aquesta frase, escrita per l'home que es considera sovint el creador de la Ciència moderna serà el fil de l'exposició que farem a continuació.

Hi ha una altra frase, d'un matemàtic molt més recent, René Thom (1923-2002), que potser resumeix encara millor el *programa* de la Ciència. René Thom rebé la medalla Fields (l958), l'equivalent entre els matemàtics del Premi Nobel, i fou molt influent per la divulgació que feu de l'anomenada *Teoria de les catàstrofes*. Però la frase de René Thom que volia destacar és "*L'explicació científica consisteix en la reducció de l'arbitrarietat de la descripció [dels fenòmens]*" (Catastrophe theory : selected papers 1972-1977 / E. C. Zeeman). És a dir, en la reducció de les explicacions de les observacions empíriques a lleis bàsiques. Segurament el paradigma d'aquesta reducció a lleis bàsiques ens el dóna l'obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* d'Isaac Newton (1643-1727), el físic més important de la història (amb el permís d'Albert Einstein) i potser també el més gran matemàtic, almenys pel què fa a la repercussió de la seva creació. Isaac Newton, alhora que crea el càlcul diferencial, cosa que fa per descriure el moviment, ens diu que l'acceleració dels cossos (la *derivada segona* de la posició d'aquests) és (únicament) funció de la posició i la velocitat (això és el que anomenem *segona llei de Newton*, i a la funció esmentada en diem *força*) i a més descobreix que aquesta funció/força és en el cas del moviment gravitatori, proporcional a les masses i a l'invers del quadrat de la distància (això és el que anomenem *llei de la gravitació universal*).

En relació amb la frase de Thom, Newton redueix la descripció del moviment del sistema solar i de tots els astres, però també el dels projectils (recordem que la balística era una de les aplicacions de l'estudi del moviment, ja en temps de Galileu), o el de la poma que li caigué sobre el cap segons la coneguda llegenda, a l'equació (*diferencial*, perquè relaciona una funció amb les seves derivades)

$$\boldsymbol{x}'' = -\frac{k}{x^3}\boldsymbol{x} \,,$$

o a variants d'aquesta per tenir en compte la presència de més d'un cos amb capacitat d'atreure els altres. És doncs Thom més Galileu: el moviment complex dels planetes i satèl·lits (naturals o artificials), o el dels projectils, es redueix a una llei bàsica (Thom) que s'expressa en llenguatge matemàtic (Galileu). Les propietats de les funcions (solucions) de l'equació expliquen les observacions empíriques del moviment dels astres i permeten predir la posició de planetes, satèl·lits i projectils.

Hi ha per descomptat disciplines científiques que es resisteixen més al "tractament" proposat. Una d'elles és la Biologia, que estudia fenòmens molt més complexos que els que estudia la Física o la Química. De fet hem de reconèixer que estem molt lluny encara (els humans) en la major part de les Ciències de la vida d'aconseguir reduccions de les descripcions a lleis bàsiques comparables a les de la física newtoniana. En els aspectes més quantitatius de la Biologia però sí que s'han aconseguit èxits importants. És el cas per exemple de l'ecologia, la dinàmica de poblacions, la genètica i curiosament un camp tant important, que s'afirma que *res no té sentit en Biologia si no és a la llum d'aquest* (Teodosius Dobzhansky*, 1973. "Nothing in biology makes sense except in the light of evolution" The American Biology Teacher 35*) M'estic referint a la teoria de l'evolució biològica. Charles Darwin (1809-1882), que juga un paper en Biologia igual al de Newton en Física, publicà aquest any en fa 150 un de les llibres més importants de la història, conjuntament amb els Principia Mathematica de Newton ja esmentats, *L'Origin of species* (1859).

Quan, anys més tard (al 1876) escriu la seva biografia, Darwin afirma, sobre el moment en què se li va "encendre la llumeta": *A l'octubre de 1838, és a dir, quinze mesos després de començar la meva recerca sistemàtica, vaig llegir, com per casualitat, l'obra de Malthus "Sobre la població…", i preparat com estava per apreciar la importància de la lluita per l'existència que apareix per tot arreu en la observació minuciosa dels comportaments dels animals i les plantes, immediatament em va frapar la idea que, sota aquestes circumstàncies, les variacions favorables tendirien a preservar-se i les desfavorables a ser destruïdes. D'aquest procés en naixerien noves espècies. Per fi tenia una teoria amb la què treballar***.**

Acabava de descobrir una de les idees més revolucionàries que mai s'han concebut: per explicar l'extraordinàriament rica varietat de formes i adaptacions dels éssers vius, els seus òrgans interns i els seus comportaments socials, la seva bellesa i l'aparent perfecció de les solucions que adopten, no cal pensar en dissenys ni causes finals (no cal pensar que hi són *per a...*). N'hi ha prou en fixar-se que quan els essers vius es reprodueixen, transmeten les seves característiques als seus descendents, possiblement amb errors (*mutacions*), i que aquells, les característiques dels quals els permeten tenir més descendència (els *més adaptats*) tindran més fills, de forma que les seves característiques aniran fent-se majoritàries (*selecció natural*). Darwin però, dóna importància al fet que, com la població creixerà sempre a la llarga per sobre dels recursos, s'establirà una competència (*la lluita per l'existència*) que farà que *les* *variacions favorables tendeixin a preservar-se* (perquè seran transmeses amb una proporció més alta a les successives generacions) *i les desfavorables a ser destruïdes*.

L'obra de l'economista i demògraf Thomas Malthus que esmenta Charles Darwin és *An Essay on the Principle of Population* (1798), un article que ha tingut molta influència sobre els economistes posteriors. En aquest treball es pot llegir *"[...] com a resultat de l'experiència, prendrem aquesta taxa de creixement com a regla i direm, que la població, quan no pateix cap catàstrofe, es duplica cada 25 anys, és a dir, creix en progressió geomètrica […] Prenent la població mundial en qualsevol moment, per exemple quan era de 1000 milions, l'espècie humana creixeria a raó de 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. milers de milions de persones"*. De forma una mica més general, l'anomenada *llei de Malthus* es pot expressar matemàticament dient que la població cada unitat de temps es multiplica per una constant h (*el coeficient o constant de Malthus*):

$$N(t+1) = h\cdot N(t). \qquad \textbf{[1]}$$

Equivalentment, si la població és $N(0)$ en un any que prenem arbitràriament com a inicial, llavors tindrem

$$N(n) = N(0)\cdot h^n.$$

Per exemple, tenint en compte que la població humana mundial a l'inici del segle XX era de 1650 milions de persones i acceptant un creixement anual de l'1.3 %, cosa que podem considerar raonable (el 2002 fou del 0.7 als Estats Units i del 1.7 a Mèxic) i que correspon a un coeficient de Malthus h = 1.013, la fórmula anterior ens dóna una predicció de 6744 milions per a l'any 2009 (de fet la població actual s'estima en uns 6770 milions), d'uns 22000 milions l'any 2100, i de 670 bilions ($6.7\cdot 10^{14}$) de persones l'any 2900. Tocaria a quatre persones per metre quadrat (aproximadament la densitat d'una manifestació molt concorreguda) sobre tota la superfície emergida de la Terra.

Naturalment, i sense arribar a aquests extrems, el creixement malthusià o en progressió geomètrica no s'observa (no és possible) quan la població és molt gran. Què vol dir *molt gran* depèn del context però habitualment els factors limitants no són senzillament l'espai físic, sinó que molt abans es manifesten d'altres com la manca de recursos (d'aliment) o el fet que la superpoblació facilita les epidèmies amb el conseqüent augment de la mortalitat i la moderació en el creixement. La consideració d'aquestes circumstàncies des del punt de vista del model matemàtic es pot fer substituint a la fórmula **[1]** la constant h per una funció del temps (per tenir també en compte els canvis ambientals externs, com ara els estacionals o altres) i de la pròpia població (per tenir en compte la competència pels recursos i altres interaccions entre els individus). Així ens quedarà un model no lineal de la forma

$$N(t+1) = h(t,N(t))\cdot N(t). \qquad \textbf{[2]}$$

De totes maneres aquest model de creixement poblacional no es gaire adequat a l'estudi de les poblacions humanes per diverses raons, sent les més importants que és un model a temps discret i el fet que no té en compte l'estructura en edat. És evident que la taxa de creixement d'una població depèn de forma dramàtica de la proporció d'individus en edat fèrtil que la formen. Una població molt jove o una de molt envellida creixerà més lentament que una en la què la majoria dels seus membres es trobin en edat reproductora.

- **Els comportaments impredictibles de les poblacions biològiques: les plagues i les epidèmies**

Com l'objectiu d'aquesta exposició no és la demografia humana en detall, i per explotar les possibilitats dels models del tipus que hem avançat, parlem ara de poblacions d'animals "semelparous" o de generacions separades. Es tracta d'espècies animals que tenen un cicle biològic que les porta a reproduir-se només una vegada i a morir poc després. Per exemple és el cas de molts insectes com ara les papallones, però també ho fan alguns vertebrats com ara els salmons, que creixen al mar i quan són sexualment madurs remunten els rius per a aparellar-se a les parts més altes d'aquests, d'on els alevins baixaran cap al mar, o les anguiles, que tenen un comportament encara més curiós: creixen als rius, d'on baixen al mar per dirigir-se, recorrent milers de quilòmetres, al Mar de los Sargazos (relativament a prop de les costes d'Amèrica del Nord), on ponen els ous que donaran lloc a les angules que desprès viatjaran de tornada per ficar-se dins dels rius europeus.

Comportaments espectaculars des del punt de vista quantitatiu i per tant més fàcils d'entendre mitjançant l'ús de les matemàtiques són les plagues de llagosta que arrasen sembrats i porten la fam més o menys periòdicament a certs països, especialment del Nord d'Àfrica, o les de Marabunta, diversos gèneres de formigues que formen grups enormes i agressius i també arrasen els cultius d'Amèrica del Sud o l'Àfrica. La característica comuna és l'explosió demogràfica impredictible que es produeix l'any de plaga, arribant les densitats a 100 individus per metre quadrat en la plaga de llagostes del desert al Sahel nord-africà. També les epidèmies (la famosa pesta negra, per exemple, que va causar la mort d'un terç de la població europea del segle XIII) es poden entendre com explosions demogràfiques, en aquest cas dels agents (bacteris o virus) responsables de la malaltia.

Encara que hi ha diverses explicacions relacionades amb canvis ambientals (en particular es creu que les temporades amb pluges abundants afavoreixen les explosions demogràfiques d'insectes), és remarcable observar que una variant no lineal del model de Malthus pot explicar els canvis impredictibles i catastròfics en les poblacions de forma senzilla i només invocant la interacció de competència entre els individus (es tractaria doncs d'una reducció en l'arbitrarietat de l'explicació). El model més antic (i senzill) amb les característiques que ens interessen es deu al matemàtic flamenc Pierre Verhulst (1804-1849). En la seva versió a temps discret, el model de Verhulst (1838) és de la forma **[2]** però h és independent del temps (no tindrà en compte, ni li caldrà invocar, canvis ambientals externs) i depèn de forma decreixent de la població (per retratar la competència pels recursos). Més precisament té la forma

$$h(N) = \alpha\ (1- N/K)$$

Així, el model és

$$N(t+1) = \alpha\ (1- N/K)$$